

估算高稳时钟抖动的幂率积分下限的研究

曹 鹏¹, 王明飞¹, 费元春²

(1. 北京印刷学院信息与机电学院, 北京 102600; 2. 北京理工大学信息与电子学院, 北京 100081)

摘 要: 幂率积分法是估算亚皮秒级时钟信号抖动所采用的一种常用方法. 该方法的换算结果与积分区间有关, 尤其与积分下限有关. 通过对幂率积分法将相位噪声转换为抖动的关系式介绍, 推导了幂率积分下限与采样时钟的频率、被采样模拟信号的最高频率及 A/D 变换的有效位之间的关系, 给出了估算幂率积分下限的算式, 并提供了该算式在估算中频采样系统时钟信号抖动中的应用实例, 间接证明了该算式.

关键词: 抖动; 相噪; 功率谱密度; 幂率积分; 中频采样

中图分类号: TN802, TN79+2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 12-2846-04

Research on the Lower Limits of Power-Law-Integral for Estimating Jitter of the High-Stability Clocks

CAO Peng¹, WANG Ming-fei¹, FEI Yuan-chun²

(1. School of Information and Mechanical Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China;

2. School of Information and Electronic, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: The power-law-integral is a commonly formula used to estimate the subpicosecond level jitter of clocks, while the results are determined by the integral-limits, in particular, by the lower limits. The transform formulas from phase noise to jitter are introduced firstly. Then we deduced quantitative relationship between the lower limits, the frequency of sampling clock, the maximum frequency of analog input signals and the effective resolution of analog-to-digital converters, as a result, we provide a formula to estimate the lower limits. Finally, provides a typical application example of the formula.

Key words: jitter; phase noise; power spectral density; power-law-integration; IF sampling

1 引言

中频带通采样系统为满足采样精度和速度两方面性能指标, 要求采样时钟信号的抖动在亚皮秒级. 对此数量级抖动的测量, 用传统的误码率分析仪或示波器已无能为力, 通常采用相噪测试仪或频谱分析仪先测出时钟的相噪, 然后采用幂率积分法将其转换为抖动. 该方法在使用中存在的缺陷是积分区间如何选择的问题. 相比之下, 由于积分上限所对应的相位噪声在较高频偏处 (一般给定为 1MHz 处) 远低于 A/D 变换的量化噪声. 因此, 换算的结果主要取决于积分下限. 对于如何选择或给定积分下限, 相关文献中并未进行专门研究, 而通常采用直接给定的方法, 如: 10Hz 或 100Hz, 甚至更为严格的给定为 1Hz^[1~7]. 因此, 在中频带通采样系统中选用和评价高稳时钟源稳定性的不一致性, 也未从根本上给予解决. 本文针对如何确定幂率积分下限这一问题, 推

导了其于采样时钟的频率、被采样模拟信号的最高频率、A/D 变换的有效位 (或信噪比) 之间存在的定量关系, 给出了估算幂率积分下限的计算公式. 最后, 提供了应用实例, 间接的验证了该关系式.

2 相噪的分类及转换

理想情况下, 采样时钟 (晶振) 的相噪功率谱密度如图 1 所示. 为了便于讨论, 假定各类噪声单独存在于不同频偏区间内, 其中, (f_4, f_h) 内为白调相噪声, 功率谱密度为 $S_{\varphi\text{VPM}}(f)$, 斜率为 1; (f_3, f_4) 内为闪烁调相噪声, 功率谱密度为 $S_{\varphi\text{FPM}}(f)$, 斜率与 f^{-1} 成正比; (f_2, f_3) 内为白调频噪声, 功率谱密度为 $S_{\varphi\text{WFM}}(f)$, 斜率与 f^{-2} 成正比; (f_1, f_2) 内为闪频调频噪声, 功率谱密度为 $S_{\varphi\text{FFM}}(f)$, 斜率与 f^{-3} 成正比; $(0, f_1)$ 内为随机游动噪声, 功率谱密度为 $S_{\varphi\text{RWF}}(f)$, 斜率与 f^{-4} 成正比^[5~8].

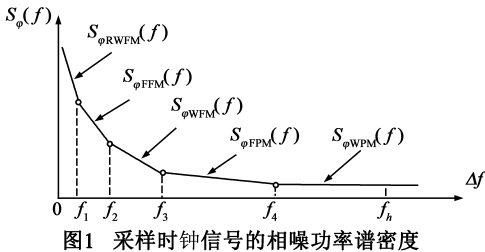


图1 采样时钟信号的相噪功率谱密度

各种相噪引起的时钟抖动如下:

(1) 白调相噪声产生的抖动:

$$\begin{aligned} J_{S_WPM}^2 &= \frac{T^2}{\pi^2} \int_{f_4}^{f_h} S_{\varphi WPM}(f) \sin^2(\pi f \tau) df \\ &= \frac{T^2}{\pi^2} S_{\varphi WPM}(f_4) \int_{f_4}^{f_h} \sin^2(\pi f \tau) df \end{aligned} \quad (1)$$

式中, f_h 是幂律积分的上限(最大频偏), 给定为 1MHz. 把 $\tau = NT$ 带入上式, 可推导出:

$$\begin{aligned} J_{S_WPM}^2 &= \frac{T^2}{2\pi^2} S_{\varphi WPM}(f_4) \\ &\cdot \left\{ (f_h - f_4) - \frac{\sin(2\pi NT f_h) - \sin(2\pi NT f_4)}{2\pi NT} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

因为, 频偏一般都远小于其载波频率 f_c , 即 $2\pi n T f_4 < 2\pi n T f_h < \ll 1$, 所以上式可化简为:

$$J_{S_WPM}^2 = \frac{T^2}{\pi^2} S_{\varphi_WPM}(f_4) (f_h - f_4) \quad (3)$$

同理, 可推导出以下几类相噪产生的抖动.

(2) 闪烁调相噪声产生的抖动:

$$\begin{aligned} J_{S_FPM}^2 &= \frac{T^2}{\pi^2} \int_{f_3}^{f_4} S_{\varphi FPM}(f) \sin^2(\pi f \tau) df \\ &= \frac{T^2 f_3^2}{\pi^2} S_{\varphi FPM}(f_3) \int_{f_3}^{f_4} \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{f} df \\ &\approx \frac{N^2 f_3^2}{2f_c^4} S_{\varphi FPM}(f_3) (f_4^2 - f_3^2) \end{aligned} \quad (4)$$

(3) 白调频噪声产生的抖动:

$$\begin{aligned} J_{S_WFM}^2 &= \frac{T^2}{\pi^2} \int_{f_2}^{f_3} S_{\varphi WFM}(f) \sin^2(\pi f \tau) df \\ &= \frac{T^2 f_2^2}{\pi^2} S_{\varphi WFM}(f_2) \int_{f_2}^{f_3} \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{f^2} df \\ &\approx \frac{N^2 f_2^2}{f_c^4} S_{\varphi WFM}(f_2) (f_3 - f_2) \end{aligned} \quad (5)$$

(4) 闪烁调频噪声产生的抖动:

$$\begin{aligned} J_{S_FFM}^2 &= \frac{T^2}{\pi^2} \int_{f_1}^{f_2} S_{\varphi FFM}(f) \sin^2(\pi f \tau) df \\ &= \frac{T^2 f_1^3}{\pi^2} S_{\varphi FFM}(f_1) \int_{f_1}^{f_2} \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{f^3} df \\ &\approx \frac{N^2 f_1^3}{f_c^4} S_{\varphi FFM}(f_1) \ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

(5) 随机游动噪声产生的抖动:

$$J_{S_RWFM}^2 = \frac{T^2}{\pi^2} \int_0^{f_1} S_{\varphi RWFM}(f) \sin^2(\pi f \tau) df \quad (7)$$

上式中, 积分下限为零时, 积分式不收敛, 也没有实际意义的. 因此, 在测量(或计算)时通常选择某一大于零的频偏 f'_c ($0 < f'_c < f_1$) 作为积分下限, 则:

$$\begin{aligned} J_{S_RWFM}^2 &= \frac{T^2 (f'_c)^4}{\pi^2} S_{\varphi RWFM}(f'_c) \int_{f'_c}^{f_1} \frac{\sin^2(\pi f \tau)}{f^4} df \\ &\approx \frac{N^2 (f'_c)^4}{2f_c^4} S_{\varphi RWFM}(f'_c) [(f'_c)^{-2} - f_1^{-2}] \end{aligned} \quad (8)$$

根据上面的讨论, 可得出频偏在 (f'_c, f_h) 范围内采样时钟总的抖动为:

$$J'_S = \sqrt{J_{S_WPM}^2 + J_{S_FPM}^2 + J_{S_WFM}^2 + J_{S_FFM}^2 + J_{S_RWFM}^2} \quad (9)$$

式(8)中积分下限 f'_c 在现有的文献资料中, 一般被直接确定为 10Hz 或 100Hz, 甚至 1Hz. 实际情况下, 晶振相噪的大部分能量集中在近载频部分, 所以该积分下限的选择对积分结果的影响极大.

实际情况下, 在任一积分区间内可能同时存在多种相噪类型, 因此, 其谱密度的斜率就不一定与频偏 Δf 成整数次幂关系. 对于这种情况, 假设当谱密度在某一频偏范围 (f_a, f_b) 内的斜率为 f^δ , 则当 $\delta \neq 1$ 时, 可得出在该频偏范围内, 由相噪转换为抖动的一般表达式为:

$$\begin{aligned} J_{S_a}^2 &= \frac{T^2}{\pi^2} \int_{f_a}^{f_b} S_{\varphi FPM}(f) \sin^2(\pi f \tau) df \\ &= \frac{T^2 f_a^\delta}{(1 - \delta)\pi^2} S_{\varphi FPM}(f_a) (f_b^{1-\delta} - f_a^{1-\delta}) \end{aligned} \quad (10)$$

3 幂律积分下限估算

不难理解采样时钟信号的抖动 J_S 及其引起的频偏 Δf 之间的关系为:

$$J_S = \Delta T = T - T' = \frac{1}{f_c} - \frac{1}{f_c + \Delta f} = \frac{\Delta f}{f_c \cdot (f_c + \Delta f)} \approx \frac{\Delta f}{f_c} \quad (11)$$

同时, 由于采样时钟信号的相噪(或抖动)在一般情况下满足高斯分布. 因此, 其频率随时间变换的一维概率密度函数可表示为:

$$p(f) = \left(\frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} \right) e^{-(f-f_c)^2 / (2\delta^2)} \quad (12)$$

式中, f_c 和 δ 分别为时钟频率函数 $f(t)$ 的均值(中心频率, 或载波频率)和方差. 根据高斯概率分布特性, 如用 $\pm 3\delta$ 表示频率 $f(t)$ 的抖动范围, 则 $f(t)$ 在该范围内的概率分布约为 99.7%; 若抖动范围取 $\pm 4\delta$, 则 $f(t)$ 在该范围内的概率分布约为 99.98%.

根据式(11)确定最大频偏为:

$$\Delta f_{\max} = J'_S \cdot f_c^2 \quad (13)$$

式中, J'_S 为频偏在 $\pm \Delta f_{\max}$ 处等效的时钟抖动. 若选取 $\pm \Delta f_{\max} = \pm 4\delta$, δ 定义为幂律积分下限频率 f'_c , 则:

$$f'_c = \frac{\Delta f_{\max}}{4} = \frac{J'_S \cdot f_c^2}{4} \quad (14)$$

这样处理的目的是保证在频偏区间 $(0, f'_c)$ 内由相噪引起的抖动远小于在频偏区间 $(0, \Delta f_{\max})$ 内由相噪引起的抖动. 即当由 $(0, \Delta f_{\max})$ 内相噪引起的抖动小于 A/D 变换限定的抖动时, 则由 $(0, f'_c)$ 内相噪引起的抖动必然小于 A/D 变换所限定的抖动. 因此, 可以认为在区间 $(0, f'_c)$ 内, 由相噪引起的抖动可以忽略不计.

假设 A/D 变换允许的抖动为 J_S , 考虑电路中还存在其它因素引起的抖动. 显然, 实际电路中, 要求时钟信号产生的抖动 J'_S 远小于总的抖动 J_S . 当 J'_S 取值小于 $J_S/3 \sim J_S/5$ 时, 则在 $(0, f'_c)$ 区间内由相噪引起的抖动可忽略不计, 则:

$$f'_c = \frac{J'_S f_c^2}{4} \leq \frac{J_S f_c^2}{20} = \frac{f_c^2}{40\pi f_{s_max} 2^{b_{ENOB}} - 1} \quad (15)$$

式中, f_{s_max} 是模拟输入信号的最高频率, b_{ENOB} 是 A/D 变换的有效位^[7~10].

4 实例分析

图 2 给出了标称分辨率为 14bit, 有效分辨率为 12bit 的一个实际采样系统的时钟源 (频率为 61.44MHz), 利用 PN9000 测出的相噪功率谱密度图. 实际计算时, 考虑到使用频谱分析仪进行估算抖动的需要, 可把 1Hz~1MHz 频率范围进行折线化, 分成 6 段. 表 1 给出了各频段相噪及其功率谱密度 $S_\varphi(f)$, 以及各区间幂率 α .

$$\begin{aligned} J'_S &= \frac{T}{\pi} \sqrt{\int_{f_2}^{f_8} S_\varphi(f) \sin^2(\pi f \tau) df} = \frac{T}{\pi} \sqrt{\int_{30}^{90} \frac{30^{3.53}}{f^{3.53}} S_\varphi(30) \sin^2(\pi f \tau) df + \dots + \int_{1 \times 10^4}^{1 \times 10^6} S_\varphi(1 \times 10^4) \sin^2(\pi f \tau) df} \\ &= \frac{1}{3.14 \times 41.66 \times 10^6} \sqrt{(5.5873 + 0.3301 + 2.1326 + 1.3150 + 1.4298 + 4.9735) \times 10^{-10}} \\ &\approx 0.21 \times 10^{-12} \text{ (s)} = 0.21 \text{ (ps)} \end{aligned} \quad (16)$$

满足 $N = 14\text{bit}$ 采样精度条件下, 允许的最大孔径抖动 J_S 为:

$$\begin{aligned} J_S &= \frac{1}{2\pi f_{s_max} \times 2^{N-1}} = \frac{1}{2\pi f_{s_max} \times 2^{13}} \\ &= \frac{1}{2 \times 3.14 \times 100 \times 10^6 \times 2^{13}} \\ &\approx 0.19 \times 10^{-12} \text{ (s)} = 0.19 \text{ (ps)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} J'_S &= \frac{T}{\pi} \sqrt{\int_{f_3}^{f_8} S_\varphi(f) \sin^2(\pi f \tau) df} = \frac{T_0}{\pi} \sqrt{\int_{100}^{1 \times 10^4} \frac{100^{3.34}}{1 - 3.34} S_\varphi(100) \sin^2(\pi f \tau) df + \dots + \int_{1 \times 10^4}^{1 \times 10^6} S_\varphi(1 \times 10^4) \sin^2(\pi f \tau) df} \\ &= \frac{1}{3.14 \times 41.66 \times 10^6} \sqrt{(2.1326 + 1.3150 + 1.4298 + 4.9735) \times 10^{-10}} \\ &\approx 0.16 \times 10^{-12} \text{ (s)} = 0.16 \text{ (ps)} \end{aligned} \quad (18)$$

同理, 在满足 A/D 变换的有效分辨率 $b_{ENOB} = 12\text{bit}$ 条件下, 允许的最大孔径抖动 J_S 为:

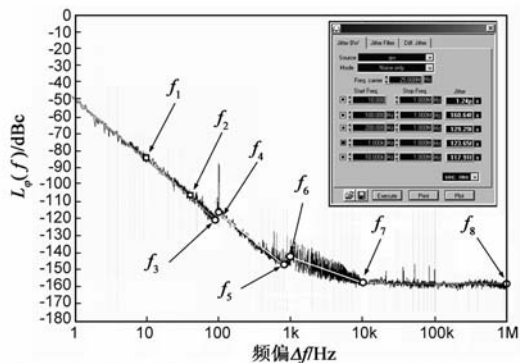


图2 相噪功率谱密度线($f_c=61.44\text{MHz}$, 测试仪器: PN9000)

表 1 各频偏范围内的相噪参数

频偏范围 (Hz)	$L_\varphi(f)$ (dBc/Hz)	$S_\varphi(f)$ (rad ² /Hz)	幂率 α
1 ~ 30	-51	1.5887×10^{-5}	3.53
30 ~ 90	-106	5.0238×10^{-11}	3.53
90 ~ 100	-120	2.0000×10^{-12}	-8.7
100 ~ 850	-116	5.0238×10^{-12}	3.34
850 ~ 1k	-147	3.9905×10^{-15}	-8.5
1k ~ 10k	-141	1.5887×10^{-14}	1.5
10k ~ 1M	-156	5.0238×10^{-16}	0

4.1 按 ADC 的标称分辨力进行估算

假设该时钟用于采样最高频率为 100MHz, A/D 变换的分辨率要求为 14bit, 则根据式 (15) 可估算出幂律积分下限 $f'_c \approx 36\text{Hz}$, 实际计算时取 $f'_c = 30\text{Hz}$. 根据此积分下限和采样频率可计算出采样时钟的抖动为:

显然, 此条件下, J'_S 略大于 J_S , 如果再加上电路中电源噪声和 A/D 变换芯片孔径抖动的影响, 则必然导致 A/D 变换的分辨力达不到要求.

4.2 按照 ADC 的有效位进行估算

同理, 若代入 A/D 变换的有效位, 即 $b_{ENOB} = 12$, 则可估算出幂律积分下限 $f'_c \approx 146\text{Hz}$, 实际计算时取 $f'_c = 100\text{Hz}$, 则采样时钟的抖动为:

$$J_S = \frac{1}{2\pi f_{s_max} \times 2^{b_{ENOB}} - 1} = \frac{1}{2\pi f_{s_max} \times 2^{11}}$$

$$= \frac{1}{2 \times 3.14 \times 100 \times 10^6 \times 2^{11}} \approx 0.78 \times 10^{-12}(\text{s}) = 0.78(\text{ps}) \quad (19)$$

显然,在此条件下, J'_s 远小于 J_s , 实际使用中,若电路设计和芯片选择合理,则在考虑了由电源和芯片引起的抖动之后,得出总的抖动也能满足在该采样性能指标下, A/D 变换所要求的时钟稳定性指标。

5 结论

本文利用 PN9000 的测试结果作为推导估算时钟抖动的参考标准,然后用高速高精度信号采集系统中实际的时钟源作为被测件,测试结果间接证明了幂律积分下限估值式的正确性.该方法在实际使用时,可利用折线化分段积分方法,利用频谱分析仪测出几个所需频偏点上的相噪,代入幂律积分公式,即可计算出被测时钟的抖动,一方面解决了幂律积分下限选择的理论依据问题,另一方面降低了测试抖动的设备要求。

参考文献:

- [1] I Zamek, S Zamek. Crystal oscillators jitter measurements and its estimation of phase noise[A]. Frequency Control Symposium and PDA Exhibition Jointly with the 17th European Frequency and Time Forum, Proceedings of the 2003 IEEE International[C]. Tampa, Florida USA: IEEE, 2003. 547 – 555.
- [2] S Pupolin, C Tomasi. Spectral analysis of line regenerator time jitter[J]. IEEE Trans on Communications, 1984, 32(5): 561 – 566.
- [3] V J Arkesteijn, E A M Klumperink, B Nauta. Jitter requirements of the sampling clock in soft ware radio receivers[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II, 2006, 53(2): 90 – 94.
- [4] A Demir. Computing timing jitter from phase noise spectra for oscillators and phase-locked loops with white and 1/f noise [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I, 2006, 53(9): 1869 – 1884.
- [5] Maxim Application Note. Clock (CLK) Jitter and Phase Noise Conversion[EB/OL]. <http://pdfserv.maxim-ic.com/en/an/AN3359.pdf>, 2004-10-10/1004-12-01.
- [6] Fordahl Application Note. Phase Noise and Jitter Conversion [EB/OL]. <http://www.metatech.com.tw>, 2004-07-11/2004-04-10.

- [7] N Da Dalt, et al. On the jitter requirements of the sampling clock for analog-to-digital converters[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I, 2002, 49(9): 1354 – 1360.
- [8] P Heydari. Analysis of the PLL jitter due to power/ground and substrate noise [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I, 2004, 51(12): 2404 – 2416.
- [9] 曹鹏, 费元春. 孔径抖动对中频华样系统信噪比影响的研究[J]. 电子学报, 2004, 32(3): 381 – 383.
Cao Peng, Fei Yuan-chun. A research for the effect on the SNR of IF sampling system due to aperture jitter[J]. Acta Electronic Sinica, 2004, 32(3): 381 – 383. (in Chinese)
- [10] A Hajimiri, S Limotyrakis, T H Lee. Jitter and phase noise in ring oscillators[J]. IEEE J Solid-State Circuits, 1999, 34(6): 790 – 804.

作者简介:



曹 鹏 男, 1969 年生于宁夏彭阳县, 北京印刷学院教授, 2005 年毕业于北京理工大学电磁场与微波技术专业, 获工学博士学位, 北京市学术创新团队带头人, 信号与信息处理北京市重点建设学科带头人, 已发表论文 20 余篇, 出版著作 4 部, 主要从事高速信号采集与处理、现代无线通信新技术研究。

E-mail: pc@bigc.edu.cn



王明飞 男, 1979 年生于山东平邑县, 北京印刷学院信号与信息处理专业硕士研究生, 主要研究方向: 高速信号采集与处理。

E-mail: www_wmf@bigc.edu.cn.



费元春 女, 1938 年生于四川泸州市, 1960 年 7 月毕业于北京工业学院无线电系雷达专业, 北京理工大学教授, 博士生导师, 中国发明协会创造学会研究委员会委员, 兵工学报常务编委, 中国电子学会会士, 历任 (1989 ~ 1996) 机电部、电子部雷达测控专业科技进步奖评委, 1988 年被授予国家级有突出贡献的专家称号。

E-mail: feiych@bit.edu.cn